

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Райхерт Татьяна Николаевна
Должность: Директор
Дата подписания: 14.02.2022 09:24:59
Уникальный программный ключ:
c914df807d771447164c08a13758e3f931de816b

Министерство просвещения Российской Федерации
Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт
(филиал)
Федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Российский государственный профессионально-педагогический университет»

Факультет естествознания, математики и информатики
Кафедра естественных наук и физико-математического образования



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.06.02 АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Уровень высшего образования
Направление подготовки

Профили подготовки
Форма обучения

Бакалавриат
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
Математика и информатика
Очная

Нижний Тагил
2020

Рабочая программа дисциплины «Алгебра и теория чисел». Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт (филиал) ФГАОУ ВО «РГППУ», Нижний Тагил, 2020. 19 с.

Настоящая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

Автор: кандидат педагогических наук,
доцент кафедры ЕНиФМО

Т. Ю. Паршина

Рецензент: кандидат педагогических наук,
доцент кафедры ЕНиФМО

Е. В. Вязовова

Программа одобрена на заседании кафедры ЕНФМ. Протокол от 10.04.2020 г. № 7.

Заведующий кафедрой

О. В. Полявина

Программа рекомендована к печати методической комиссией факультета естествознания, математики и информатики. Протокол от 17.04.2020 г. № 7.

Председатель МК ФЕМИ

Н.З.Касимова

Программа утверждена решением Ученого совета факультета естествознания, математики и информатики. Протокол от 30.04.2020 г. № 8.

Декан факультета

Т. В. Жуйкова

Главный специалист ОИР

О. В. Левинских

© Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт(филиал) ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», 2020.
© Паршина Тамара Юрьевна, 2020.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Результаты освоения дисциплины.....	4
4. Структура и содержание дисциплины.....	5
4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы.....	5
4.2. Учебно-тематический план	6
4.3. Содержание дисциплины.....	7
5. Образовательные технологии.....	9
6. Учебно-методические материалы.....	9
6.1. Организация самостоятельной работы студентов	9
6.2. Организация текущего контроля и промежуточной аттестации	14
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение.....	18
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	19

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: формирование и развитие у студентов профессиональных и универсальных компетенций на основе обучения фундаментальным понятиям высшей алгебры, алгебры многочленов, теории делимости целых чисел и теории сравнений.

Задачи:

1. Сформировать у студентов представления об основных алгебраических структурах.
2. Сформировать у студентов цельное представление об алгебре многочленов от одной и нескольких переменных, теории делимости целых чисел и теории сравнений.
3. Сформировать умения применять изученную теорию к решению задач, в том числе элементарной (и школьной) математики.
4. Изучить специальные способы решения уравнений в целых, натуральных, простых числах.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» является частью учебного плана по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика» и «Информатика». Дисциплина Б1.О.06.02 «Алгебра и теория чисел» включена в Блок Б.1 «Дисциплины (модули)» и является составной частью раздела «Обязательная часть», модуля Б1.О.06 «Предметно-содержательный модуль». Дисциплина реализуется в НТГСПИ на кафедре естественных наук и физико-математического образования.

Данная дисциплина логически связана с дисциплинами профиля «Математика» (Элементарная математика, Практикум по решению задач по элементарной математике, Линейная алгебра), которые изучаются на первом - пятом курсах. Дисциплина помогает глубже осваивать темы элементарной математики, касающиеся алгебры многочленов и теории делимости целых (натуральных) чисел.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина направлена на формирование и развитие следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
УК1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИУК 1.1. Знает основные источники и методы поиска информации, необходимой для решения поставленных задач
	ИУК 1.2. Умеет осуществлять поиск информации для решения поставленных задач, применять методы критического анализа и синтеза информации
	ИУК 1.3. Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки; отличает факты от мнений, интерпретаций и оценок; применяет методы системного подхода для решения поставленных задач
ПК7. Способен формировать у обучающихся умения моделировать объекты и процессы окружающей реальности и пользоваться заданной математической или информационной моделью.	ИПК 7.1. Знает понятие «модель», виды и свойства моделей; имеет представление о моделировании и его основных этапах.
	ИПК 7.2. Умеет обучать описывать и формализовывать предметную область, строить математические и информационные модели процессов окружающей среды, в том числе и с использованием ИКТ.
	ИПК 7.3. Подготовлен к построению математических моделей в различных предметных областях и реализации их с использованием ИКТ.
ПК8. Способен формировать у обучающихся конкретные знания,	ИПК 8.1. Знает основные математические понятия и основы теоретической информатики, связи между ними и возможности

математики и информатики.	использования при решении математических задач.
	ИПК 8.2. Умеет решать типовые математические задачи и обучать методам их решения.
	8.3. Умеет решать типовые задачи по информатике и программированию и обучать методам их решения.
	ИПК 8.4. Подготовлен решать задачи разного уровня сложности по математике и информатике, определяя их место в школьном курсе.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

31. Виды основных алгебраических структур и их свойства.
32. Свойства колец многочленов от одной и нескольких переменных.
33. Критерии приводимости и неприводимости многочленов над основными числовыми полями.
34. Определение и простейшие свойства делимости целых чисел.
35. Алгоритм Евклида для двух натуральных чисел.
36. Свойства простых чисел, основную теорему арифметики.
37. Определение и простейшие свойства сравнений.
38. Способы решения сравнений с переменной.

Уметь:

- У1. Находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух и нескольких целых чисел или многочленов от одной переменной с помощью алгоритма Евклида.
- У2. Отделять кратные неприводимые множители многочлена.
- У3. Раскладывать многочлен по степеням двучлена.
- У4. Выражать симметрические многочлены через основные симметрические многочлены.
- У5. Определять, какими свойствами обладает данная бинарная операция на множестве, вид алгебраической структуры, отделять изоморфные структуры.
- У6. Проверить, является ли данное натуральное число простым, составным.
- У7. Составить каноническое представление натурального числа.
- У8. Находить НОД и НОК с помощью канонических представлений.
- У9. Находить цепную дробь, в которую раскладывается заданное рациональное число.
- У10. Применять свойства сравнений для решения уравнений первой степени с двумя неизвестными во множестве целых чисел.
- У11. Применять теорему Эйлера и теорему Ферма для вычисления остатков от деления.
- У12. Решать сравнения первой степени с помощью теоремы Эйлера и свойств подходящих дробей.

Владеть:

- В1. Решения типичных задач теории многочленов.
- В2. Навыками применения аппарата теории делимости и теории сравнений для решения прикладных задач.
- В3. Приёмами самоорганизации и умениями самоконтроля учебной деятельности

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачётных единиц (216 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице № 1.

Таблица № 1

Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Вид работы	Форма обучения		
	Очная		
	7 семестр	8 семестр	Всего
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	108	108	216
Контактная работа, в том числе:	38	38	76
Лекции	16	16	32
Практические занятия	22	22	44
Самостоятельная работа, в том числе:	34	34	68
Изучение теоретического курса	24	24	48
Самоподготовка к текущему контролю знаний	10	10	20
Подготовка к экзаменам	36	36	72

4.2. Учебно-тематический план

Таблица № 2

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего часов	Контактная работа		Сам. работа	Формы текущего контроля успеваемости
		Лекции	Практич. занятия		
4 курс, 7 семестр					
Раздел 1. Основные алгебры.	20	6	6	8	
1.1. Алгебраические операции, группы	8	2	2	4	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
1.2. Кольца, поля.	6	2	2	2	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
1.3. Комплексные числа.	6	2	2	2	
Раздел 2. Теория делимости в кольце целых чисел	32	6	10	16	
2.1 Делимость целых чисел	8	2	2	4	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
2.2 Простые и составные числа. Каноническое представление натурального числа.	10	2	4	4	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
2.3 НОД и НОК целых чисел.	8	2	2	4	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
2.4 Цепные дроби	6	-	2	4	Решение задач у доски
Раздел 3.. Теория сравнений с арифметическими приложениями	20	4	6	10	
3.1 Арифметические сравнения	6	2	2	2	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
3.2 Теоремы Эйлера и Ферма.	8	2	2	4	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам

3.3 Сравнения с переменной	4	-	2	2	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
Приложения сравнений	2	-	-	2	Опрос на экзамене
Подготовка к экзамену	36			36	
Всего за семестр	108	16	22	70	
4 курс, 8 семестр					
Раздел 4. Многочлены	58	12	16	30	
4.1 Кольцо многочленов от одной переменной	14	2	4	8	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
4.2 Теория делимости в кольце многочленов от одной переменной	14	2	4	8	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
4.3 Неприводимые над полем многочлены от одной переменной	8	2	2	4	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
4.4 Многочлены от нескольких переменных	8	2	2	4	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
4.5 Многочлены над основными числовыми полями	14	4	4	6	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
Раздел 5. Элементы общей алгебры	14	4	6	4	
5.1 Элементы теории групп	8	2	4	2	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
5.2 Элементы теории колец	6	2	2	2	Решение задач у доски
Подготовка к экзамену	36			36	
Всего за семестр	108	16	22	70	
Всего по дисциплине	216	32	44	140	

4.3. Содержание дисциплины

Лекционный курс (32 часа)

Лекция 1. Алгебраические операции, группы. (2 часа)

Бинарные операции; ассоциативные, коммутативные операции. Дистрибутивность бинарной операции относительно другой бинарной операции. Нейтральный элемент, его единственность; симметричный элемент и его единственность в случае ассоциативной операции. Понятие группы. Простейшие свойства групп. Полугруппы, моноиды. Изоморфизм групп. Подгруппа: свойство, признак.

Лекция 2. Кольца. Поля. (2 часа)

Понятие кольца. Простейшие свойства кольца. Делители нуля в кольце. Алгебры и алгебраические системы. Подкольцо: свойство, признак. Понятие поля. Понятие частного, свойства частных, отсутствие делителей нуля в поле. Подполе: свойство, признак. Числовое поле. Расширение колец (полей).

Лекция 3. Комплексные числа. (2 часа)

Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа, условие равенства комплексных чисел в алгебраической форме. Комплексное сопряжение и его свойства, модуль комплексного числа и его свойства. Тригонометрическая форма комплексного числа, её существование. Условие равенства комплексных чисел, отличных от

нуля, в тригонометрической форме. Множество аргументов комплексного числа, произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра, корень из комплексного числа. Геометрическое представление комплексных чисел, геометрический смысл модуля и аргумента. Построение циркулем и линейкой сумм, разности, произведения и частного двух комплексных чисел.

Лекция 4. Делимость целых чисел. (2 часа)

Теорема о делении с остатком для целого a и натурального b , формулировка теоремы о делении с остатком для целого a и целого b ($b \neq 0$). Отношение делимости в кольце Z и его простейшие свойства.

Лекция 5. Простые и составные числа. Каноническое представление натурального числа. (2 часа)

Простые числа. Основное свойство простого числа. Основная теорема арифметики, каноническое представление натурального числа и его единственность. Нахождение натуральных делителей натурального числа по его каноническому представлению. Число и сумма натуральных делителей натурального числа. Бесконечность множества простых чисел, решето Эратосфена, критерий простоты натурального числа.

Лекция 6. НОД и НОК. (2 часа)

Наибольший общий делитель нескольких целых чисел, его линейное представление, свойства и правило нахождения. Взаимно простые целые числа и их свойства. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное нескольких целых чисел, условие его существования, свойства и правило нахождения. Связь между наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным двух натуральных чисел.

Лекция 7. Арифметические сравнения. (2 часа)

Сравнение по натуральному модулю. Основные свойства числовых сравнений. Класс вычетов по модулю. Свойства классов. Кольцо классов вычетов.

Лекция 8. Теоремы Эйлера и Ферма. (2 часа)

Полная и приведённая системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Свойства функции Эйлера. Каноническое представление $n!$.

Лекция 9. Кольцо многочленов от одной переменной (2 часа)

Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с единицей. Деление многочлена на двучлен $(x - c)$. Схема Горнера, теорема Безу. Формальная производная многочлена над полем нулевой характеристики. Разложение по степеням $(x - c)$. Кольцо многочленов от одной переменной над полем.

Лекция 10. Теория делимости в кольце многочленов от одной переменной (2 часа)

Теория делимости: теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем. Простейшие свойства делимости многочленов. НОД многочленов, свойства НОДа. Алгоритм Евклида. НОК многочленов. Попарно взаимно простые многочлены.

Лекция 11. Неприводимые над полем многочлены от одной переменной (2 часа)

Неприводимые над полем многочлены. Основная теорема теории делимости многочленов. Неприводимые кратные множители многочлена. Кратные корни.

Лекция 12. Многочлены от нескольких переменных. (2 часа)

Кольцо многочленов от нескольких переменных над целостным кольцом. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах. Выражение симметрического многочлена через элементарные симметрические многочлены.

Лекция 13-14. Многочлены над основными числовыми полями. (4 часа)

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Каноническое представление многочлена над полем комплексных чисел. Формулы Виета. Сопряжённость мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами. Приводимость многочлена над полем действительных чисел. Неприводимые над полем действительных чисел многочлены. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Приводимость многочлена

над полем рациональных чисел. Критерий неприводимости многочлена с целыми коэффициентами над полем рациональных чисел.

Лекция 15. Элементы теории групп. (2 часа)

Подгруппа группы. Циклические группы. Смежные классы группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальные делители, факторгруппы. Теорема о гомоморфизмах.

Лекция 16. Элементы теории колец. (2 часа)

Подкольца. Идеалы кольца. Факторкольца. Кольца главных идеалов. Евклидовы и факториальные кольца.

5. Образовательные технологии

Процесс обучения дисциплине «Алгебра и теория чисел» рекомендуется строить с опорой на традиционный подход, при котором на лекционных занятиях закладываются основы теоретических знаний по дисциплине, а на практических занятиях ведётся работа по усвоению теории и приобретению практических умений и навыков решения типичных задач.

С целью формирования у студентов компетенций, предусмотренных программой, следует применять следующие технологии:

- практикум с использованием практико-ориентированных задач;
- технологию деятельностного подхода;
- обучение в сотрудничестве.

6. Учебно-методические материалы

6.1. Организация самостоятельной работы студентов

Раздел 1. Основные алгебры. Алгебраические операции, группы, кольца, поля (4 часа).

Задание. Повторить основные вопросы теории:

1. Определение бинарной операции, свойства ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности.

2. Определение нейтрального элемента, его свойства, определение симметричного элемента, его свойства.

3. Аксиомы группы, кольца, поля, примеры групп, колец, полей.

Решить задачи.

1. Является ли бинарной операцией на N действие $\odot$, определённое правилом $a \odot b = a^2 - 2ab + b^2$?

2. На R^+ задали бинарную операцию $\odot$ по правилу $a \odot b = \sqrt{a \cdot b}$. Какие из утверждений истинны:

а) $\exists e \in R^+ \forall a \in R^+ a \odot e = e \odot a = a$;

б) $\forall a \in R^+ \exists e \in R^+ a \odot e = e \odot a = a$?

3. Определена ли на множестве $2Z+1$ операция, заданная правилом $a \odot b = \frac{a+b}{2}$?

4. Докажите, что на множестве R операция $*$ нахождения среднего арифметического $\left(x * y = \frac{x+y}{2} \right)$ дистрибутивна относительно себя.

5. На множестве Q задана операция $*$ так: $x * y = x + y + 1$. Ассоциативна ли операция $*$?

6. Докажите, что действие $\odot$, определённое правилом $a \odot b = a^2 + b^2$ является коммутативной, но не ассоциативной бинарной операцией на R .

7. На множестве $A = \{0, 1, 2\}$ задана операция $*$ так: каждой паре (a, b) ставится в соответствие остаток от деления на 3 числа $a + b + ab$. Составьте таблицу Кэли для операции $*$. Какими свойствами обладает операция $*$?

8. На множестве $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ задана операция $*$ так: каждой паре (a, b) ставится в соответствие остаток от деления на 5 числа $2ab$. Составьте таблицу Кэли для операции $*$. Коммутативна ли операция $*$? Есть ли в A нейтральный элемент относительно $*$?

9. Обладает ли множество $\mathbb{R}^+$ нейтральным элементом относительно операции $*$, заданной равенством $a * b = \sqrt{a \cdot b}$?

10. Ассоциативна ли операция вычитания на множестве $\mathbb{Z}$?

11. Дистрибутивна ли на $\mathbb{R}$ операция $\oplus$ относительно $\oplus$, если операции заданы так: $a \oplus b = a \cdot b + a + b$, $a \oplus b = a + b + 1$?

12. Докажите, что операция взятия наименьшего из двух действительных чисел: $(a, b) \xrightarrow{*} \min\{a, b\}$ дистрибутивна относительно себя.

12. Доказать, что $(\mathbb{Z}, *)$ является группой, если $a * b = \begin{cases} a + b, & \text{если } a - \text{чётно} \\ a - b, & \text{если } a - \text{нечётно} \end{cases}$. Будет ли эта группа абелевой?

13. Образует ли множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, подгруппу в группе $GL_2(\mathbb{R})$ – группе обратимых матриц второго порядка над полем действительных чисел?

14. Образует ли группу множество $\mathbb{Q} \setminus \{-3\}$ относительно операции $*$, определяемой правилом $a * b = ab + 3a + 3b + 6$?

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Веселова Л. В. Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Электрон. дан. — Казань : КНИТУ, 2014. — 107 с. Режим доступа <http://e.lanbook.com/book/73214>

2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>

Раздел 1. Основные алгебры. Комплексные числа. (2 часа).

Задание. Повторить основные вопросы теории:

1. Алгебраическая форма комплексного числа.
2. Свойства сопряжённых чисел.
3. Модуль комплексного числа, его свойства.
4. Тригонометрическая форма комплексного числа.
5. Умножение, деление, возведение в натуральную степень комплексных чисел, заданных тригонометрическими формами.
6. Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа.

Решить задачи.

1. Вычислить: $(2+i) \cdot (3-i) + (2+3i) \cdot (3+4i)$; $\frac{(5+i) \cdot (7-6i)}{3+i}$;
 $\frac{(3-4i) \cdot (2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i) \cdot (2+i)}{2-i}$; $\frac{(1+2i)^3 + (1-2i)^3}{(2-i)^2 - (2+i)^2}$,1.5. i^n , $n \in \mathbb{N}$.

2. Решить уравнения: $\bar{z} = -4z$, $z^2 + \bar{z} = 0$.

3. Найти действительные x и y , удовлетворяющие уравнению $(2+i) \cdot x + (1+2i) \cdot y = 1-4i$.

4. Решить уравнения: $|z| + z = 8+4i$, $z^2 + z + 1 = 0$.

5. Вычислить: $\sqrt{5-12i}$, $\sqrt{-24-10i}$.

6. Решить уравнения: $z^2 + (6+i) \cdot z + 5+5i = 0$, $(3-i)z^2 - 2(2-3i) \cdot z - 4i = 0$.

7. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа: 3 , -3 , $3i$, $-3i$, $1+i$, $-1-i$, $1-i$, $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}+i$.

8. Вычислить:

$$(1+\sqrt{3}i)^{150}, \frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(-1+i)^8 - (1+i)^4}, \frac{(-i-\sqrt{3})^{12} \cdot (-2i+2\sqrt{3})^6}{(1-i)^{16}}, \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}.$$

9. Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции $\sin 4x$, $\cos 4x$.

10. Докажите, что $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

11. Вычислить: $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{-1+i}$, $\sqrt[4]{1-i}$, $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$, $\sqrt[6]{i}$.

12. Решить уравнения $x^8 - 16 = 0$, $x^7 = -1$.

13. Выразить в радикалах $\cos \frac{2\pi}{5}$.

14. Изобразить на плоскости точки, соответствующие числам: 5 , -2 , $-3i$, $\pm 1 \pm i$.

15. Найти комплексные числа, соответствующие вершинам квадрата с центром в начале координат, со сторонами длины 1, параллельными осям координат.

16. Изобразить множество точек плоскости, соответствующих комплексным числам z , удовлетворяющим условиям:

$$\arg z = \frac{\pi}{3}, |z| = 1, |z| \leq 2, |z-1-i| < 1, |\arg z| \leq \frac{5\pi}{6}, |\operatorname{Re} z| \geq 2, |z-1| + |z+1| = 3,$$

$$\arg(z-2+i) = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \leq \arg(z-1-i) \leq \frac{4\pi}{3}, \begin{cases} |z-i| \leq 3 \\ |z+2i| \geq 1 \end{cases}, \begin{cases} 1 \leq |\operatorname{Re} z| \leq 2 \\ 1 \leq |\operatorname{Im} z| \leq 2 \end{cases}.$$

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Веселова Л. В. Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Электрон. дан. — Казань : КНИТУ, 2014. — 107 с. Режим доступа <http://e.lanbook.com/book/73214>

2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>

Раздел 2. Теория делимости в кольце целых чисел. (10 часов).

Задание. Повторить основные вопросы теории:

1. Теорема о делении с остатком для целого и натурального числа, для двух целых чисел, ограничения на остаток от деления.

2. Свойства делимости целых чисел.

3. Определение и критерий простого и составного числа, основная теорема арифметики, каноническое представление натурального числа.

4. Алгоритм Евклида. Нахождение НОД и НОК двух и более натуральных (целых) чисел.

5. Цепная дробь, способ обращения рационального числа в цепную дробь, подходящие дроби к цепной.

6. Свойства подходящих дробей.

Решить задачи из пособия 3. §1 № 1(1,3,5), 2 (1,7,13,17), 4-8, 12, 2; §2 № 1, 3, 11, 16, 17.

§3 № 1(1,11,19), 2 (1,3), 3(1,3); §4 № 1(1,11), 2(3,17); §6 № 1(1,4,8), 4(1,3), 20.

§8 № 1(1,8,11), 2(1,3), 7(1), 8(1).

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 384 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>

2. Веселова Л. В. Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Электрон. дан. — Казань : КНИТУ, 2014. — 107 с. Режим доступа <http://e.lanbook.com/book/73214>

3. Паршина Т Ю. Теория делимости в кольце целых чисел [Текст] : учебно-методическое пособие для физико-математического факультета / Т. Ю. Паршина ; Федер. агентство по образованию, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. - Нижний Тагил : НТГСПА, 2010. - 48 с.

4. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М. : Московский центр непрерывного математического образования, 2009. — 336 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9279>

Раздел 3. Теория сравнений с арифметическими приложениями. (6 часов)

1. Определение сравнения, свойства сравнений, классы вычетов.

2. Полная и приведённая системы вычетов, теоремы Эйлера и Ферма.

3. Решение сравнения с переменной, общий способ решения сравнения с переменной, равносильные сравнения.

4. Сравнения первой степени, методы их решения.

Решить задачи.

1. Записать в виде сравнения утверждение: целое число a имеет вид $8k-3$.

2. Найти сумму, разность и произведение классов $\overline{7}$ и $\overline{23}$ в кольце Z_{23} .

3. Составить полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 15.

4. Найти число чисел, удовлетворяющих условиям: $12 \leq a \leq 600$, $(a, 7) = 1$.

5. Найти остаток от деления 23^{48} на 20, используя теорему Эйлера.

6. Решить уравнение $\varphi(90^x) = 2160$.

7. Найти каноническое представление числа $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 21$. Вычислить число и сумму его натуральных делителей.

8. Решить сравнение $6x^{12} + 2x^{10} - 8x^7 + x^3 - 2x + 1 = 0 \pmod{5}$.

9. Решить во множестве целых чисел уравнение $27x + 31y = 29$.

10. Решить сравнения:

$19x = 52 \pmod{30}$, $15x = 70 \pmod{27}$, $13x = 72 \pmod{25}$, $18x = 46 \pmod{10}$;

используя свойства подходящих дробей: $41x = 7 \pmod{101}$, $105x = 79 \pmod{286}$.

11. С помощью таблиц индексов: решить сравнения: $37x^{12} = 39 \pmod{67}$; $56^x = 30 \pmod{73}$;

найти остаток от деления 49^{512} на 23.

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 384 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>

Раздел 4. Многочлены. (16 часов)

1. Теорема о делении с остатком для двух многочленов на поле, свойства делимости.
2. НОД многочленов, алгоритм Евклида.
3. Приводимые и неприводимые многочлены над полем. Алгоритм отделения кратных неприводимых многочленов.
4. Лексикографическая форма записи многочлена от нескольких переменных
5. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах.
6. Критерий неприводимости многочлена над полем комплексных, полем действительных, полем рациональных чисел.
7. Каноническое представление многочлена над полем комплексных чисел. Основная теорема алгебры.

Решить задачи.

Решить задачи из пособия 2: № 36(а, б), 37(а, б), 38, 60(а, б), 62 (а, б), 64(а), 65(а), 66(а), 140(а), 151(а), 153(а), 168(а, б), 173(а), 174(а), 180(а, л), 185. № 259-263, 271(а), 272(а, б), № 210, 211.

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>
2. Паршина Т Ю. Алгебра многочленов [Текст] : учеб.-метод. пособие для студентов, обучающихся по профилю "Математика" / Т. Ю. Паршина ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. — Нижний Тагил : НТГСПА, 2014. — 88 с.

Раздел 5. Элементы общей алгебры. (6 часов).

Задание.

1. Повторить определение подгруппы, нормального делителя, смежного класса
2. Свойства циклических групп
3. Разложение группы по её нормальному делителю.

Решить задачи.

1. Выпишите все подгруппы циклической мультипликативной группы 12-го порядка.
2. Найти порядки элемента $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ в группах $\mathbb{C}^*$ и $\mathbb{C}$.
3. Найти порядок элемента $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ в группе S_5 .
4. Укажите какую-нибудь подгруппу H второго порядка группы S_3 . Найдите правостороннее разложение S_3 по H . Будет ли H нормальным делителем S_3 ? Ответ обоснуйте.
5. Пусть G аддитивная циклическая группа 9-го порядка. Составьте левые смежные классы группы G по подгруппе H третьего порядка. Опишите факторгруппу G/H .
6. Является ли идеалом кольца $\mathbb{Z}$ множество? Ответ обоснуйте.
7. Является ли идеалом кольца $\mathbb{Z}$ множество $A = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge 35n \in 5\}$? Ответ обоснуйте.
8. Покажите, что в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ числа, кратные 10, образуют идеал. Составьте смежные классы кольца $\mathbb{Z}$ по этому идеалу. Запишите основное множество образующегося факторкольца и составьте таблицы сложения и умножения в нём.

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>

2. Окунев Л. Я. Высшая алгебра [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: . — Загл. с экрана. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/289>

Таблица № 3

Темы занятий	Количество часов			Содержание самостоятельной работы	Формы контроля СРС
	Всего	Аудиторных	Самост. работы		
Раздел 1. Основные алгебры.	20	12	8	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач. Подготовка к проверочной работе.	Выполнение домашней контрольной работы Опрос по теории
Раздел 2. Теория делимости в кольце целых чисел	32	16	16	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач. Подготовка к проверочной работе.	Выполнение домашней контрольной работы. Опрос по теории
Раздел 3.. Теория сравнений с арифметическими приложениями	20	10	10	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач.	Выполнение домашней контрольной работы. Опрос по теории
Раздел 4. Многочлены	58	28	30	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач	Выполнение домашней контрольной работы. Опрос по теории
Раздел 5. Элементы общей алгебры	14	10	4	Проработка материалов лекции. Решение домашних задач	Опрос по теории
Экзамены	72		72	Подготовка к экзамену	Ответ на экзамене

Итого	216	76	140		
-------	-----	----	-----	--	--

6.2. Организация текущего контроля и промежуточной аттестации

Проверка усвоения знаний ведется на практических занятиях в письменной форме (опросы по теории) и устной форме в ходе решения задач у доски. Кроме того, предполагается выполнение индивидуальных домашних контрольных работ.

Промежуточная аттестация по данной дисциплине проводится в форме экзамена (7 и 8 семестры).

Примерные варианты домашних контрольных работ

Домашняя контрольная работа № 1

1. При делении целого a на целое число b получается (неполное) частное q . Найти наибольшее и наименьшее значение a : $b = 31, q = 91$.
2. Найти делитель и остаток, если известны делимое a и частное q : $a = 1903, q = 26$.
3. Число a — чётное, не кратное 4. Доказать, что число a^2 при делении на 32 даёт остаток 4.
4. Доказать, что если при целых a, b, c число $6a + 12b + 11c$ делится на 17, то и $a + 2b - c$ делится на 17.
5. Найти наибольший общий делитель тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 1411, 4641 и 5253.
6. Представить наибольший общий делитель чисел a и b в виде их целочисленной линейной комбинации: $a = 280, b = 245$.

7. Числа m и n натуральные, причём $\frac{m}{n}$ правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?
8. Найти наименьшее общее кратное данной тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 408, 432 и 672.

9. Найти натуральные числа a и b , если известно, что: $(a, b) = 7, [a, b] = 504$.

Домашняя контрольная работа № 2

1. Выяснить, является ли число 3053 простым.
2. Найдите все простые числа, заключённые между 600 и 620.
3. Найдите каноническое разложение числа 108000.
4. Найдите НОД и НОК чисел 116424000 и 151200 по их каноническому разложению.
5. Найдите показатель степени числа 47 в каноническом разложении числа 2624!
6. Определите, сколькими нулями оканчивается число 5343!
7. Вычислите число и сумму всех натуральных делителей числа 211680.

Домашняя контрольная работа № 3

1. Записать в виде сравнения утверждение: целое число a имеет вид $6k + 4$.
2. Найти сумму, разность и произведение классов $\overline{6}$ и $\overline{20}$ в кольце $\mathbb{Z}_{24}$.
3. Составить полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 22.
4. Найти число чисел, удовлетворяющих условиям: $32 \leq a \leq 500, (a, 6) = 1$.
5. Найти остаток от деления 43^{54} на 20, используя теорему Эйлера.
6. Решить уравнение $\varphi(20^x) = 3200$.
7. Разложить в конечную цепную дробь число $\frac{1212}{2400}$ и выписать все подходящие дроби.
8. Найти каноническое представление числа $31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 41$. Вычислить число и сумму его натуральных делителей.

9. Решить сравнение $6x^{12} + 2x^{10} - 8x^7 + x^3 - 2x + 1 = 0 \pmod{5}$.
10. Решить во множестве целых чисел уравнение $27x + 31y = 29$.
11. Решить сравнение $15x = 70 \pmod{27}$.
12. Решить сравнение $41x = 7 \pmod{101}$, используя свойства подходящих дробей, $\frac{3}{40}, \frac{7}{13}, \frac{1}{18}$.
13. Записать каждую из дробей $\frac{3}{40}, \frac{7}{13}, \frac{1}{18}$ в виде десятичной, предварительно охарактеризовав её вид.

Домашняя контрольная работа № 4

1. Для многочлена $f = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ с помощью схемы Горнера найти:
 - a) $f(3), f'(3)$; b) кратность корня $x_1 = -1, x_2 = 2$; c) разложение по степеням $x - 3$.
2. Отделить кратные множители многочлена $f = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.
3. Решить уравнения, используя формулу Кардано и метод Феррари:

$$x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0, \quad x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$$

4. Используя алгоритм Евклида, освободить дробь $\frac{11}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1}$ от иррациональности в знаменателе.
5. Найти рациональные корни многочлена $f = 2x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 10x - 3$.

Домашняя контрольная работа № 5

1. Выразить через основные симметрические многочлены $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
2. Решить с помощью результата систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - y - 3x = 0 \\ y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0 \end{cases}$$

3. Отделить кратные множители многочлена $f = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

Вопросы теории к экзамену (7 семестр)

1. Бинарные операции, их свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства. Полугруппа, моноид.
2. Группа. Простейшие свойства и примеры групп. Подгруппа, примеры, свойство, признак.
3. Гомоморфные и изоморфные отображения групп, их свойства.
4. Кольцо. Примеры и простейшие свойства. Гомоморфные и изоморфные отображения колец и их свойства.
5. Обратимые элементы кольца, их свойства. Целостные кольца, закон сокращения для умножения в целостном кольце.
6. Поле. Примеры. Простейшие свойства. Подполе, примеры, свойства, признак.
7. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма.
8. Свойства сопряжения и модуля комплексного числа.
9. Тригонометрическая форма комплексного числа: существование, условие равенства.
10. Арифметические действия над комплексными числами, заданными тригонометрическими формами. Формула Муавра.
11. Геометрическое истолкование комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами, заданными точками на плоскости.
12. Теорема о делении с остатком. Отношение делимости в кольце целых чисел.
13. Наибольший общий делитель и его основные свойства.
14. Алгоритм Евклида и его применение к вычислению НОД двух натуральных чисел.
15. Взаимно простые числа, их свойства.

16. Простые числа, их основные свойства.
17. Основная теорема арифметики. Каноническое представление натурального числа.
18. Число и сумма натуральных делителей натурального числа.
19. Свойства числовых сравнений
20. Определение класса вычетов, перечислить свойства классов. Сложение и умножение классов. Кольцо классов вычетов, нахождение класса, противоположного данному, вычитание классов.
21. Теоремы о классах вычетов.
22. Полная система вычетов и её формы записи: определение, примеры.
23. Класс, взаимно простой с модулем. Доказать необходимое и достаточное условие взаимной простоты класса и модуля. Число классов, взаимно простых с модулем.
24. Приведённая система вычетов и её формы записи: определение, примеры. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии приведённой системы вычетов по модулю m .
25. Теоремы Эйлера и Ферма.
26. Функция Эйлера: определение, свойства. Формулы для нахождения значения функции Эйлера для простого и для составного числа.
27. Цепная дробь. Подходящие дроби к цепной, перечислить свойства подходящих дробей.
28. Сравнение с переменной. Решение сравнения с переменной. Теоремы о равносильностях.
29. Сравнения первой степени, методы их решения.
30. Обратимые элементы кольца классов вычетов. Поле классов по простому модулю.
31. Теоремы о решении сравнений высших степеней по простому модулю.
32. Теоремы об обращении правильной обыкновенной дроби в десятичную.
33. Признаки делимости. Сформулировать обобщённые признаки для десятичной системы.

Примерные задачи для экзамена (7 семестр)

1. Если a, b, c – целые числа такие, что $100a+10b+c$ делится на 21, то $a-2b+4c$ также делится на 21. Доказать.
2. Доказать $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} ((a, c) = 1 \Rightarrow (a \cdot b, c) = (b, c))$.
3. Доказать, что если при целых a, b число a^2 делится на $a+b$, то и b^2 делится на $a+b$.
4. Найти $(11a+2b, 18a+5b)$, если $(a, b) = 1$
5. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.
6. Доказать, что дробь $\frac{14a+17}{21a+25}$ несократима при любом натуральном a .
7. Найти наилучшее несократимое рациональное приближение числа $\frac{3+\sqrt{33}}{3}$ со знаменателем, не превышающим 200. Оценить погрешность.
8. Сократить дробь $\frac{1207}{1349}$, предварительно разложив её в цепную.
9. Найти действительное α по его разложению в цепную дробь $[4; (1, 3, 1, 8)]$.
10. С помощью алгоритма Евклида разложить в цепную дробь $\frac{360}{1189}$.
11. Найти наибольший общий делитель тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 1411, 4641 и 5253.
12. Представить наибольший общий делитель чисел a и b в виде их целочисленной линейной комбинации: $a = 280, b = 245$.
13. Найти наименьшее общее кратное данной тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 408, 432 и 672.

14. Найти натуральные числа a и b , если известно, что: $(a, b) = 7$, $[a, b] = 504$.

Вопросы теории к экзамену (8 семестр)

1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теорема о делении с остатком.
2. Деление многочлена на двучлен $(x - c)$. Теорема Безу. Схема Горнера.
3. Отношение делимости в кольце многочленов от одной переменной. Свойства делимости.
4. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
5. Свойства НОД многочленов. Взаимно простые многочлены, их свойства.
6. Неприводимые многочлены в кольце многочленов над полем. Свойства неприводимых многочленов.
7. Основная теорема теории делимости многочленов.
8. Характеристика поля. Свойства характеристики.
9. Формальная производная многочлена над полем нулевой характеристики. Разложение многочлена по степеням двучлена $(x - c)$. Формула Тейлора.
10. Кратные неприводимые множители многочлена. Алгоритм отделения кратных неприводимых множителей.
11. Корень многочлена. Кратный корень. Определение кратности корня с помощью схемы Горнера.
12. Многочлены от нескольких переменных над полем. Лексикографический способ записи многочленов.
13. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
14. Результат двух многочленов и его применение для исключения одной переменной из системы двух нелинейных уравнений от двух переменных.
15. Алгебраически замкнутое поле. Разложение на линейные множители в кольце многочленов над алгебраически замкнутым полем.
16. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Следствия. Формулы Виета.
17. Многочлены в кольце $\mathbb{R}[x]$. Теорема о комплексных корнях многочлена с действительными коэффициентами. Многочлены, неприводимые в $\mathbb{R}[x]$.
18. Многочлены над полем рациональных чисел. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий Эйзенштейна.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение

Основная литература

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 384 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>
2. Веселова Л. В. Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Электрон. дан. — Казань : КНИТУ, 2014. — 107 с. Режим доступа <http://e.lanbook.com/book/73214>
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>
4. Паршина Т Ю. Алгебра многочленов [Текст] : учеб.-метод. пособие для студентов, обучающихся по профилю "Математика" / Т. Ю. Паршина ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. — Нижний Тагил : НТГСПА, 2014. — 88 с.
5. Паршина Т Ю. Теория делимости в кольце целых чисел [Текст] : учебно-методическое пособие для физико-математического факультета / Т. Ю. Паршина ; Федер. агентство по образованию, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. - Нижний Тагил : НТГСПА, 2010. - 48 с.

Дополнительная литература

1. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М. : Московский центр непрерывного математического образования, 2009. — 336 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9279>

2. Окунев Л. Я. Высшая алгебра [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: . — Загл. с экрана. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/289>

Сетевые ресурсы

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=46.

<http://www.biblioclub.ru/book/63140/>

<http://www.padabum.com/d.php?id=10581>

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. / Э. Б. Винберг. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. — 544 с.

Ссылка для скачивания <http://nashol.com/2013041770674/kurs-algebri-vinberg-e-b-2001.html>

2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. / Л. Я. Куликов. — М.: Высшая школа, — 1979. — 558 с.

Ссылка для чтения: <http://bookre.org/reader?file=1221511&pg=1>

3. Шрейдер Ю. А. Равенство. Сходство. Порядок. / Ю. А. Шрейдер. — М.: Наука, —1971. — 256 с.

Ссылка для скачивания: <http://www.padabum.com/d.php?id=10581>

Ссылка для чтения: <http://padaread.com/?book=10581&pg=4>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

1. Лекционная аудитория – 211 А.

2. Доска, мел.

3. Мультимедиа-проектор.