

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Райхерт Татьяна Николаевна
Должность: Директор
Дата подписания: 22.11.2022 18:40:52
Уникальный программный ключ:
c914df807d771447164c08a137f8c7f9311e816b

Министерство просвещения Российской Федерации
Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт
(филиал)
Федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Российский государственный профессионально-педагогический университет»

Факультет естествознания, математики и информатики
Кафедра естественных наук и физико-математического образования

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ Б1.О.07.07 АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Уровень высшего образования
Направление подготовки

Профили подготовки
Форма обучения

Бакалавриат
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
Математика и информатика
Очная

Нижний Тагил
2022

Рабочая программа дисциплины «Алгебра и теория чисел». Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский государственный профессионально-педагогический университет», Нижний Тагил, 2022. – 17 с.

Настоящая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (№125 от 22.02.2018).

Автор: кандидат пед. наук, доцент кафедры ЕНФМ  Т. Ю. Паршина

Одобрена на заседании кафедры ЕНФМ 17 июня 2022 г., протокол № 9.

Заведующий кафедрой ЕНФМ  О. В. Полявина

Рекомендована к печати методической комиссией ФЕМИ 21 июня 2022 г., протокол № 9

Председатель методической комиссии  В. А. Гордеева

© Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт(филиал) ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», 2022.
© Паршина Тамара Юрьевна, 2022.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Результаты освоения дисциплины.....	4
4. Структура и содержание дисциплины.....	6
4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы.....	6
4.2. Учебно-тематический план	6
4.3. Содержание дисциплины.....	8
5. Образовательные технологии.....	9
6. Учебно-методические материалы.....	10
6.1. Организация самостоятельной работы студентов	10
6.2. Организация текущего контроля и промежуточной аттестации	11
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение.....	16
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	17

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: формирование и развитие у студентов профессиональных и универсальных компетенций на основе обучения фундаментальным понятиям высшей алгебры, алгебры многочленов, теории делимости целых чисел и теории сравнений.

Задачи:

1. Сформировать у студентов представления об основных алгебраических структурах.
2. Сформировать у студентов цельное представление об алгебре многочленов от одной и нескольких переменных, теории делимости целых чисел и теории сравнений.
3. Сформировать умения применять изученную теорию к решению задач, в том числе элементарной (и школьной) математики.
4. Изучить специальные способы решения уравнений в целых, натуральных, простых числах.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» является частью учебного плана по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика» и «Информатика». Дисциплина Б1.О.07.07 «Алгебра и теория чисел» включена в Блок Б.1 «Дисциплины (модули)» и является составной частью раздела «Обязательная часть», модуля Б1.О.07 «Предметно-методический модуль по профилю Математика». Дисциплина реализуется в НТГСПИ на кафедре естественных наук и физико-математического образования.

Данная дисциплина логически связана с дисциплинами профиля «Математика» (Элементарная математика, Практикум по решению задач по математике, Линейная алгебра), которые изучаются на первом - пятом курсах. Дисциплина помогает глубже осваивать темы элементарной математики, касающиеся алгебры многочленов и теории делимости целых (натуральных) чисел.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина направлена на формирование и развитие следующих компетенций:

Категория (группа) компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
Системное и критическое мышление	УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение
		УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
		УК-1.3. Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений

Научные основы педагогической деятельности	ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8.1. Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний, в том числе в предметной области
		ОПК-8.2. Проектирует и осуществляет учебно-воспитательный процесс с опорой на знания предметной области, психолого-педагогические знания и научно-обоснованные закономерности организации образовательного процесса
ОТФ А Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1. Знает: структуру, состав и дидактические единицы предметной области математика
		ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО
		ПК-1.3. Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

31. Виды основных алгебраических структур и их свойства.
32. Свойства колец многочленов от одной и нескольких переменных.
33. Критерии приводимости и неприводимости многочленов над основными числовыми полями.
34. Определение и простейшие свойства делимости целых чисел.
35. Алгоритм Евклида для двух натуральных чисел.
36. Свойства простых чисел, основную теорему арифметики.
37. Определение и простейшие свойства сравнений.
38. Способы решения сравнений с переменной.

Уметь:

- У1. Находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух и нескольких целых чисел или многочленов от одной переменной с помощью алгоритма Евклида.
- У2. Отделять кратные неприводимые множители многочлена.
- У3. Раскладывать многочлен по степеням двучлена.
- У4. Выражать симметрические многочлены через основные симметрические многочлены.
- У5. Определять, какими свойствами обладает данная бинарная операция на множестве, вид алгебраической структуры, отделять изоморфные структуры.
- У6. Проверить, является ли данное натуральное число простым, составным.
- У7. Составить каноническое представление натурального числа.
- У8. Находить НОД и НОК с помощью канонических представлений.
- У9. Находить цепную дробь, в которую раскладывается заданное рациональное число.

У10. Применять свойства сравнений для решения уравнений первой степени с двумя неизвестными во множестве целых чисел.

У11. Применять теорему Эйлера и теорему Ферма для вычисления остатков от деления.

У12. Решать сравнения первой степени с помощью теоремы Эйлера и свойств подходящих дробей.

Владеть:

В1. Решения типичных задач теории многочленов.

В2. Навыками применения аппарата теории делимости и теории сравнений для решения прикладных задач.

В3. Приёмами самоорганизации и умениями самоконтроля учебной деятельности

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 9 зачётных единиц (324 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице № 1.

Таблица № 1

Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Вид работы	Форма обучения			
	Очная			
	7 семестр	8 семестр	9 семестр	Всего
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	108	108	108	324
Контактная работа, в том числе:	42	48	48	138
Лекции	14	16	16	46
Практические занятия	28	32	32	92
Самостоятельная работа	57	33	33	123
Подготовка к экзаменам, зачёту	9	27	27	63

4.2. Учебно-тематический план

Таблица № 2

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего часов	Контактная работа		Сам. работа	Формы текущего контроля успеваемости
		Лекции	Практич. занятия		
4 курс, 7 семестр					
Раздел 1. Основные алгебры.	81	12	22	47	
1.1. Алгебраические операции, группы	28	4	8	16	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
1.2. Кольца, поля.	20	4	4	12	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
1.3. Комплексные числа.	33	4	10	19	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа
Раздел 2. Теория делимости в кольце целых чисел	54	10	18	26	

2.1 Делимость целых чисел	18	2	6	10	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
Подготовка к зачёту	9	-	-	9	
Всего за семестр	108	14	28	66	
4 курс, 8 семестр					
2.2 Простые и составные числа. Каноническое представление натурального числа.	16	2	6	8	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
2.3 НОД и НОК целых чисел.	14	4	4	6	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
2.4 Цепные дроби	6	2	2	2	Решение задач у доски
Раздел 3. Теория сравнений с арифметическими приложениями	45	8	20	17	
3.1 Арифметические сравнения	12	2	4	6	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
3.2 Теоремы Эйлера и Ферма.	18	4	8	6	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
3.3 Сравнения с переменной	11	2	6	3	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
Приложения сравнений	4	-	2	2	Опрос на экзамене
Подготовка к экзамену	27			27	
Всего за семестр	108	16	32	60	
5 курс, 9 семестр					
Раздел 4. Многочлены	60	12	24	24	
4.1 Кольцо многочленов от одной переменной	10	2	4	4	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
4.2 Теория делимости в кольце многочленов от одной переменной	16	4	6	6	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
4.3 Неприводимые над полем многочлены от одной переменной	10	2	4	4	Решение задач у доски, домашняя контрольная работа, мини-зачёт по теоремам
4.4 Многочлены от нескольких переменных	14	2	6	6	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
4.5 Многочлены над основными числовыми полями	10	2	4	4	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам
Раздел 5. Элементы общей алгебры	21	4	8	9	
5.1 Элементы теории групп	14	2	6	6	Решение задач у доски, мини-зачёт по теоремам

5.2 Элементы теории колец	7	2	2	3	Решение задач у доски
Подготовка к экзамену	27			27	
Подготовка к экзамену	108	16	32	60	
Всего по дисциплине	324	46	92	186	

4.3. Содержание дисциплины

Лекционный курс (46 часов)

Лекции 1-2. Алгебраические операции, группы. (4 часа)

Бинарные операции; ассоциативные, коммутативные операции. Дистрибутивность бинарной операции относительно другой бинарной операции. Нейтральный элемент, его единственность; симметричный элемент и его единственность в случае ассоциативной операции. Понятие группы. Простейшие свойства групп. Полугруппы, моноиды. Изоморфизм групп. Подгруппа: свойство, признак.

Лекции 3-4. Кольца. Поля. (4 часа)

Понятие кольца. Простейшие свойства кольца. Делители нуля в кольце. Алгебры и алгебраические системы. Подкольцо: свойство, признак. Понятие поля. Понятие частного, свойства частных, отсутствие делителей нуля в поле. Подполе: свойство, признак. Числовое поле. Расширение колец (полей).

Лекции 5-6. Комплексные числа. (4 часа)

Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа, условие равенства комплексных чисел в алгебраической форме. Комплексное сопряжение и его свойства, модуль комплексного числа и его свойства. Тригонометрическая форма комплексного числа, её существование. Условие равенства комплексных чисел, отличных от нуля, в тригонометрической форме. Множество аргументов комплексного числа, произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра, корень из комплексного числа. Геометрическое представление комплексных чисел, геометрический смысл модуля и аргумента. Построение циркулем и линейкой сумм, разности, произведения и частного двух комплексных чисел.

Лекция 7. Делимость целых чисел. (2 часа)

Теорема о делении с остатком для целого a и натурального b , формулировка теоремы о делении с остатком для целого a и целого b ($b \neq 0$). Отношение делимости в кольце Z и его простейшие свойства.

Лекция 8. Простые и составные числа. Каноническое представление натурального числа. (2 часа)

Простые числа. Основное свойство простого числа. Основная теорема арифметики, каноническое представление натурального числа и его единственность. Нахождение натуральных делителей натурального числа по его каноническому представлению. Число и сумма натуральных делителей натурального числа. Бесконечность множества простых чисел, решето Эратосфена, критерий простоты натурального числа.

Лекции 9-10. НОД и НОК. (4 часа)

Наибольший общий делитель нескольких целых чисел, его линейное представление, свойства и правило нахождения. Взаимно простые целые числа и их свойства. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное нескольких целых чисел, условие его существования, свойства и правило нахождения. Связь между наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным двух натуральных чисел.

Лекция 11. Цепные дроби. (2 часа)

Цепная дробь, существование и единственность представления рационального числа конечной цепной дробью. Подходящие дроби к цепной. Свойства подходящих дробей.

Лекция 12. Арифметические сравнения. (2 часа)

Сравнение по натуральному модулю. Основные свойства числовых сравнений. Класс вычетов по модулю. Свойства классов. Кольцо классов вычетов.

Лекции 13-14. Теоремы Эйлера и Ферма. (4 часа)

Полная и приведённая системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Свойства функции Эйлера. Каноническое представление $n!$.

Лекция 15. Сравнения с переменной. (2 часа)

Решение сравнения с переменной, Теоремы о равносильности. Сравнения первой степени, методы решения сравнений первой степени. Сравнения по составному модулю. Системы сравнений.

Лекция 16. Кольцо многочленов от одной переменной (2 часа)

Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с единицей. Деление многочлена на двучлен $(x - c)$. Схема Горнера, теорема Безу. Формальная производная многочлена над полем нулевой характеристики. Разложение по степеням $(x - c)$. Кольцо многочленов от одной переменной над полем.

Лекции 17-18. Теория делимости в кольце многочленов от одной переменной (4 часа)

Теория делимости: теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем. Простейшие свойства делимости многочленов. НОД многочленов, свойства НОДа. Алгоритм Евклида. НОК многочленов. Попарно взаимно простые многочлены.

Лекция 19. Неприводимые над полем многочлены от одной переменной (2 часа)

Неприводимые над полем многочлены. Основная теорема теории делимости многочленов. Неприводимые кратные множители многочлена. Кратные корни.

Лекция 20. Многочлены от нескольких переменных. (2 часа)

Кольцо многочленов от нескольких переменных над целостным кольцом. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах. Выражение симметрического многочлена через элементарные симметрические многочлены.

Лекция 21. Многочлены над основными числовыми полями. (2 часа)

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Каноническое представление многочлена над полем комплексных чисел. Формулы Виета. Сопряжённость мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами. Приводимость многочлена над полем действительных чисел. Неприводимые над полем действительных чисел многочлены. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Приводимость многочлена над полем рациональных чисел. Критерий неприводимости многочлена с целыми коэффициентами над полем рациональных чисел.

Лекция 22. Элементы теории групп. (2 часа)

Подгруппа группы. Циклические группы. Смежные классы группы по подгруппе. Свойства смежных классов. Теорема Лагранжа для конечных групп. Нормальные делители, факторгруппы. Теорема о гомоморфизмах.

Лекция 23. Элементы теории колец. (2 часа)

Подкольца. Идеалы кольца. Факторкольца. Кольца главных идеалов. Евклидовы и факториальные кольца.

5. Образовательные технологии

Процесс обучения дисциплине «Алгебра и теория чисел» рекомендуется строить с опорой на традиционный подход, при котором на лекционных занятиях закладываются основы теоретических знаний по дисциплине, а на практических занятиях ведётся работа по усвоению теории и приобретению практических умений и навыков решения типичных задач.

С целью формирования у студентов компетенций, предусмотренных программой, следует применять следующие технологии:

- практикум с использованием практико-ориентированных задач;
- технологию деятельностного подхода;
- обучение в сотрудничестве.

6. Учебно-методические материалы
6.1. Организация самостоятельной работы студентов

Таблица № 3

Темы занятий	Количество часов			Содержание самостоятельной работы	Формы контроля СРС
	Всего	Аудитор-ных	Самост. работы		
Раздел 1. Основные алгебры.	81	34	47	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач. Подготовка к проверочной работе.	Выполнение домашней контрольной работы Опрос по теории
Раздел 2. Теория делимости в кольце целых чисел	54	28	26	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач. Подготовка к проверочной работе.	Выполнение домашней контрольной работы. Опрос по теории
Раздел 3.. Теория сравнений с арифметическими приложениями	45	28	17	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач.	Выполнение домашней контрольной работы. Опрос по теории
Раздел 4. Многочлены	60	36	24	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Решение домашних задач	Выполнение домашней контрольной работы. Опрос по теории
Раздел 5. Элементы общей алгебры	21	12	9	Проработка материалов лекции. Решение домашних задач	Опрос по теории
Экзамены, зачёт	63		63	Подготовка к экзамену, зачёту	Ответ на экзамене, зачёте
Итого	324	138	186		

6.2. Организация текущего контроля и промежуточной аттестации

Проверка усвоения знаний ведется на практических занятиях в письменной форме (опросы по теории) и устной форме в ходе решения задач у доски. Кроме того, предполагается выполнение индивидуальных домашних контрольных работ.

Промежуточная аттестация по данной дисциплине проводится в форме зачёта (7 семестр) и экзамена (8 и 9 семестры).

Примерные варианты домашних контрольных работ

Домашняя контрольная работа № 1

1. При делении целого a на целое число b получается (неполное) частное q . Найти наибольшее и наименьшее значение a : $b = 31$, $q = 91$.
2. Найти делитель и остаток, если известны делимое a и частное q : $a = 1903$, $q = 26$.
3. Число a — чётное, не кратное 4. Доказать, что число a^2 при делении на 32 даёт остаток 4.
4. Доказать, что если при целых a , b , c число $6a + 12b + 11c$ делится на 17, то и $a + 2b - c$ делится на 17.
5. Найти наибольший общий делитель тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 1411, 4641 и 5253.
6. Представить наибольший общий делитель чисел a и b в виде их целочисленной линейной комбинации: $a = 280$, $b = 245$.
7. Числа m и n натуральные, причём $\frac{m}{n}$ правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n - m}{5n + 2m}$, если известно, что она сократима?
8. Найти наименьшее общее кратное данной тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 408, 432 и 672.
9. Найти натуральные числа a и b , если известно, что: $(a, b) = 7$, $[a, b] = 504$.

Домашняя контрольная работа № 2

1. Выяснить, является ли число 3053 простым.
2. Найдите все простые числа, заключённые между 600 и 620.
3. Найдите каноническое разложение числа 108000.
4. Найдите НОД и НОК чисел 116424000 и 151200 по их каноническому разложению.
5. Найдите показатель степени числа 47 в каноническом разложении числа 2624!
6. Определите, сколькими нулями оканчивается число 5343!
7. Вычислите число и сумму всех натуральных делителей числа 211680.

Домашняя контрольная работа № 3

1. Записать в виде сравнения утверждение: целое число a имеет вид $6k + 4$.
2. Найти сумму, разность и произведение классов $\bar{6}$ и $\bar{20}$ в кольце Z_{29} .
3. Составить полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 22.
4. Найти число чисел, удовлетворяющих условиям: $32 \leq a \leq 500$, $(a, 6) = 1$.
5. Найти остаток от деления 43^{54} на 20, используя теорему Эйлера.
6. Решить уравнение $\varphi(20^x) = 3200$.
7. Разложить в конечную цепную дробь число $\frac{1212}{2400}$ и выписать все подходящие дроби.
8. Найти каноническое представление числа $31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 41$. Вычислить число и сумму его натуральных делителей.
9. Решить сравнение $6x^{12} + 2x^{10} - 8x^7 + x^3 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.
10. Решить во множестве целых чисел уравнение $27x + 31y = 29$.

11. Решить сравнение $15x \equiv 70 \pmod{27}$.
12. Решить сравнение $41x \equiv 7 \pmod{101}$, используя свойства подходящих дробей.
13. Записать каждую из дробей $\frac{3}{40}, \frac{7}{13}, \frac{1}{18}$ в виде десятичной, предварительно охарактеризовав её вид.

Домашняя контрольная работа № 4

1. Для многочлена $f = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ с помощью схемы Горнера найти:
 - a) $f(3), f'(3)$; b) кратность корня $x_1 = -1, x_2 = 2$; c) разложение по степеням $x - 3$.
2. Отделить кратные множители многочлена $f = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.
3. Решить уравнения, используя формулу Кардано и метод Феррари:

$$x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0, \quad x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0.$$
4. Используя алгоритм Евклида, освободить дробь $\frac{11}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1}$ от иррациональности в знаменателе.
5. Найти рациональные корни многочлена $f = 2x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 10x - 3$.

Домашняя контрольная работа № 5

1. Выразить через основные симметрические многочлены $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
2. Решить с помощью результата систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - y - 3x = 0 \\ y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0 \end{cases}.$$
3. Отделить кратные множители многочлена $f = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

Вопросы теории к зачёту (7 семестр)

1. Бинарные операции, их свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства. Полугруппа, моноид.
2. Группа. Простейшие свойства и примеры групп. Подгруппа, примеры, свойство, признак.
3. Гомоморфные и изоморфные отображения групп, их свойства.
4. Кольцо. Примеры и простейшие свойства. Гомоморфные и изоморфные отображения колец и их свойства.
5. Обратимые элементы кольца, их свойства. Целостные кольца, закон сокращения для умножения в целостном кольце.
6. Поле. Примеры. Простейшие свойства. Подполе, примеры, свойства, признак.
7. Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма.
8. Свойства сопряжения и модуля комплексного числа.
9. Тригонометрическая форма комплексного числа: существование, условие равенства.
10. Арифметические действия над комплексными числами, заданными тригонометрическими формами. Формула Муавра.
11. Геометрическое истолкование комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами, заданными точками на плоскости.

Примерные задачи для зачёта (7 семестр)

1. Является ли бинарной операцией на N действие $\circ$, определённое правилом $a \circ b = a^2 - 2ab + b^2$?
2. На R^+ задали бинарную операцию $\circ$ по правилу $a \circ b = \sqrt{a \cdot b}$. Какие из утверждений истинны:
 - a) $\exists e \in R^+ \forall a \in R^+ a \circ e = e \circ a = a$;
 - б) $\forall a \in R^+ \exists e \in R^+ a \circ e = e \circ a = a$?

3. Определена ли на множестве $2\mathbb{Z}+1$ операция, заданная правилом $a \circ b = \frac{a+b}{2}$?
4. Докажите, что на множестве $\mathbb{R}$ операция $*$ нахождения среднего арифметического $\left(x * y = \frac{x+y}{2}\right)$ дистрибутивна относительно себя.
5. На множестве $\mathbb{Q}$ задана операция $*$ так: $x * y = x + y + 1$. Ассоциативна ли операция $*$?
6. Докажите, что действие $\circ$, определённое правилом $a \circ b = a^2 + b^2$ является коммутативной, но не ассоциативной бинарной операцией на $\mathbb{R}$.
7. На множестве $A = \{0, 1, 2\}$ задана операция $*$ так: каждой паре (a, b) ставится в соответствие остаток от деления на 3 числа $a + b + ab$. Составьте таблицу Кэли для операции $*$. Какими свойствами обладает операция $*$?
8. На множестве $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ задана операция $*$ так: каждой паре (a, b) ставится в соответствие остаток от деления на 5 числа $2ab$. Составьте таблицу Кэли для операции $*$. Коммутативна ли операция $*$? Есть ли в A нейтральный элемент относительно $*$?
9. Обладает ли множество $\mathbb{R}^+$ нейтральным элементом относительно операции $*$, заданной равенством $a * b = \sqrt{a \cdot b}$?
10. Ассоциативна ли операция вычитания на множестве $\mathbb{Z}$?
11. Дистрибутивна ли на $\mathbb{R}$ операция $\square$ относительно $\oplus$, если операции заданы так: $a \square b = a \cdot b + a + b$, $a \oplus b = a + b + 1$?
12. Докажите, что операция взятия наименьшего из двух действительных чисел: $(a, b) \xrightarrow{*} \min \{a, b\}$ дистрибутивна относительно себя.
13. Доказать, что $(\mathbb{Z}, *)$ является группой, если $a * b = \begin{cases} a + b, & \text{если } a - \text{чётно} \\ a - b, & \text{если } a - \text{нечётно} \end{cases}$. Будет ли эта группа абелевой?
14. Образуется ли множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, подгруппу в группе $GL_2(\mathbb{R})$ – группе обратимых матриц второго порядка над полем действительных чисел?
15. Образуется ли подкольцо в кольце квадратных матриц третьего порядка над $\mathbb{R}$ множество матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & f \end{pmatrix}$?
16. Докажите, что числа вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$, образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения. Будет ли это кольцо целостным?
17. Проверить, будет ли множество $H = \{(a, b, c) \mid a + b = c\}$ образовывать подпространство в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$.
18. Образуется ли группа множество $\mathbb{Q} \setminus \{-3\}$ относительно операции $*$, определяемой правилом $a * b = ab + 3a + 3b + 6$?
19. Выполните действия: $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^8 - (1 + i\sqrt{3})^6}{(1 - i)^8}$, $(2 - i)^3 - i$, $\sqrt{1 - 2i}$
20. Решите уравнения: $2i\bar{z} + (1 + i)z = 3 + 5i$, $z^4 - (2 + 2i) \cdot (-1 - i\sqrt{3}) = 0$, $\sqrt{5}x^2 - 5x + 10 = 0$.
21. Изобразите на комплексной плоскости точки, для которых справедливо $\begin{cases} 2 \leq |z + i| \leq 3 \\ |\operatorname{Im}(z + i)| \geq 2. \end{cases}$

Вопросы теории к экзамену (8 семестр)

1. Теорема о делении с остатком. Отношение делимости в кольце целых чисел.
2. Наибольший общий делитель и его основные свойства.
3. Алгоритм Евклида и его применение к вычислению НОД двух натуральных чисел.
4. Взаимно простые числа, их свойства.
5. Простые числа, их основные свойства.
6. Основная теорема арифметики. Каноническое представление натурального числа.
7. Число и сумма натуральных делителей натурального числа.
8. Свойства числовых сравнений
9. Определение класса вычетов, перечислить свойства классов. Сложение и умножение классов. Кольцо классов вычетов, нахождение класса, противоположного данному, вычитание классов.
10. Теоремы о классах вычетов.
11. Полная система вычетов и её формы записи: определение, примеры.
12. Класс, взаимно простой с модулем. Необходимое и достаточное условие взаимной простоты класса и модуля. Число классов, взаимно простых с модулем.
13. Приведённая система вычетов и её формы записи: определение, примеры. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии приведённой системы вычетов по модулю m .
14. Теоремы Эйлера и Ферма.
15. Функция Эйлера: определение, свойства. Формулы для нахождения значения функции Эйлера для простого и для составного числа.
16. Цепная дробь. Подходящие дроби к цепной, свойства подходящих дробей.
17. Сравнение с переменной. Решение сравнения с переменной. Теоремы о равносильностях.
18. Сравнения первой степени, методы их решения.
19. Обратимые элементы кольца классов вычетов. Поле классов по простому модулю.
20. Теоремы о решении сравнений высших степеней по простому модулю.
21. Теоремы об обращении правильной обыкновенной дроби в десятичную.
22. Признаки делимости. Сформулировать обобщённые признаки для десятичной системы.

Примерные задачи для экзамена (8 семестр)

1. Если a, b, c – целые числа такие, что $100a + 10b + c$ делится на 21, то $a - 2b + 4c$ также делится на 21. Доказать.
2. Доказать $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} ((a, c) = 1 \Rightarrow (a \cdot b, c) = (b, c))$.
3. Доказать, что если при целых a, b число a^2 делится на $a + b$, то и b^2 делится на $a + b$.
4. Найти $(11a + 2b, 18a + 5b)$, если $(a, b) = 1$
5. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.
6. Доказать, что дробь $\frac{14a+17}{21a+25}$ несократима при любом натуральном a .
7. Найти наилучшее несократимое рациональное приближение числа $\frac{3+\sqrt{33}}{3}$ со знаменателем, не превышающим 200. Оценить погрешность.
8. Сократить дробь $\frac{1207}{1349}$, предварительно разложив её в цепную.
9. Найти действительное α по его разложению в цепную дробь $[4; (1, 3, 1, 8)]$.
10. С помощью алгоритма Евклида разложить в цепную дробь $\frac{360}{1189}$.
11. Найти наибольший общий делитель тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 1411, 4641 и 5253.
12. Представить наибольший общий делитель чисел a и b в виде их целочисленной линейной комбинации: $a = 280, b = 245$.

13. Найти наименьшее общее кратное данной тройки натуральных чисел, используя алгоритм Евклида: 408, 432 и 672.
14. Найти натуральные числа a и b , если известно, что: $(a, b) = 7$, $[a, b] = 504$.
15. С помощью алгоритма Евклида найдите наибольший общий делитель и его линейное представление для натуральных чисел 1232 и 1672.
16. Найдите $(14819, 16147)$ и $[14912, 16147]$.
17. Докажите, что два последовательных нечетных числа взаимно просты.
18. Найдите, при каких простых p числа $p+10$ и $p+20$ являются простыми.
19. Запишите каноническое представление числа 32967 и вычислите число и сумму его натуральных делителей.
20. Найдите свободное от квадратов натуральное число, имеющее 4 натуральных делителя, сумма которых 72.
21. Решите в целых числах уравнения:

$$\begin{array}{ll} 47x - 16y = 3; & x^2 = y^2 + 2y + 13 \\ y + 4x + 2xy = 0 & 4x^2 - 4xy + 2y^2 = 68 \end{array}$$
22. Докажите, что уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ не имеет решений в целых числах.
23. Докажите $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \ (a^5 + b^5 \equiv c^5 \pmod{11}) \Rightarrow abc \equiv 0 \pmod{11}$.
24. В поле $\mathbb{Z}_{257}$ найдите класс, обратный классу $\overline{37}$.
25. Составьте полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 15.
26. Найдите количество натуральных чисел, не превосходящих 350 и взаимно простых с 350.
27. Пользуясь теоремой Эйлера, найдите остаток от деления а) 42^{930} на 25; б) $3^{2^{2012}}$ на 7.

Вопросы теории к экзамену (9 семестр)

1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теорема о делении с остатком.
2. Деление многочлена на двучлен $(x - c)$. Теорема Безу. Схема Горнера.
3. Отношение делимости в кольце многочленов от одной переменной. Свойства делимости.
4. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
5. Свойства НОД многочленов. Взаимно простые многочлены, их свойства.
6. Неприводимые многочлены в кольце многочленов над полем. Свойства неприводимых многочленов.
7. Основная теорема теории делимости многочленов.
8. Характеристика поля. Свойства характеристики.
9. Формальная производная многочлена над полем нулевой характеристики. Разложение многочлена по степеням двучлена $(x - c)$. Формула Тейлора.
10. Кратные неприводимые множители многочлена. Алгоритм отделения кратных неприводимых множителей.
11. Корень многочлена. Кратный корень. Определение кратности корня с помощью схемы Горнера.
12. Многочлены от нескольких переменных над полем. Лексикографический способ записи многочленов.
13. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
14. Результат двух многочленов и его применение для исключения одной переменной из системы двух нелинейных уравнений от двух переменных.
15. Алгебраически замкнутое поле. Разложение на линейные множители в кольце многочленов над алгебраически замкнутым полем.
16. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Следствия. Формулы Виета.

17. Многочлены в кольце $R[x]$. Теорема о комплексных корнях многочлена с действительными коэффициентами. Многочлены, неприводимые в $R[x]$.

18. Многочлены над полем рациональных чисел. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий Эйзенштейна.

1. Найдите НОД многочленов $f = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $g = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2$, а также многочлены u , v такие, что $(f, g) = f \cdot u + g \cdot v$.

2. С помощью схемы Горнера найти значение многочлена $f = x^4 + 12x^3 + 60x^2 + 136x + 120$ и всех его производных при $x = -4$. Разложите f по степеням $(x + 4)$.

3. Убедитесь, что число $\sqrt{2}$ является корнем многочлена $f = x^5 - 3\sqrt{2}x^4 + 7x^3 - 5\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$. Определите кратность этого корня и найти все остальные корни f .

4. Определить кратные множители многочлена $f = x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$.

5. Выразите через основные симметрические многочлены многочлен

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_3 + x_2^3 x_1 + x_3^3 x_2.$$

6. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$. Корнями какого кубического многочлена будут числа tx_1, tx_2, tx_3 ?

7. Решите с помощью результата систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 + x^2 - y - 3x = 0 \\ y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0. \end{cases}$$

8. Решите уравнения:

а) $x^3 - 6x^2 + 6x + 13 = 0$, используя формулы Кардано

б) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 6x - 15 = 0$, используя метод Феррари.

9. Освободите дробь $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 3}$ от иррациональности в знаменателе.

10. Найдите рациональные корни многочлена $f = 2x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 10x - 3$.

11. Докажите, что многочлен $x^5 - 14x + 21$ неприводим в кольце $Q[x]$.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение

Основная литература

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 384 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>

2. Веселова Л. В. Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Электрон. дан. — Казань : КНИТУ, 2014. — 107 с. Режим доступа <http://e.lanbook.com/book/73214>

3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>

4. Паршина Т Ю. Алгебра многочленов [Текст] : учеб.-метод. пособие для студентов, обучающихся по профилю "Математика" / Т. Ю. Паршина ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. — Нижний Тагил : НТГСПА, 2014. — 88 с.

5. Паршина Т Ю. Теория делимости в кольце целых чисел [Текст] : учебно-методическое пособие для физико-математического факультета / Т. Ю. Паршина ; Федер. агентство по образованию, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. - Нижний Тагил : НТГСПА, 2010. - 48 с.

Дополнительная литература

1. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М. : Московский центр непрерывного математического образования, 2009. — 336 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9279>

2. Окунев Л. Я. Высшая алгебра [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: . — Загл. с экрана. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/289>

Сетевые ресурсы

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=46.

<http://www.biblioclub.ru/book/63140/>

<http://www.padabum.com/d.php?id=10581>

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. / Э. Б. Винберг. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. — 544 с.

Ссылка для скачивания <http://nashol.com/2013041770674/kurs-algebri-vinberg-e-b-2001.html>

2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. / Л. Я. Куликов. — М.: Высшая школа, — 1979. — 558 с.

Ссылка для чтения: <http://bookre.org/reader?file=1221511&pg=1>

3. Шрейдер Ю. А. Равенство. Сходство. Порядок. / Ю. А. Шрейдер. — М.: Наука, — 1971. — 256 с.

Ссылка для скачивания: <http://www.padabum.com/d.php?id=10581>

Ссылка для чтения: <http://padaread.com/?book=10581&pg=4>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

1. Лекционная аудитория – 211 А.

2. Доска, мел.

3. Мультимедиа-проектор.